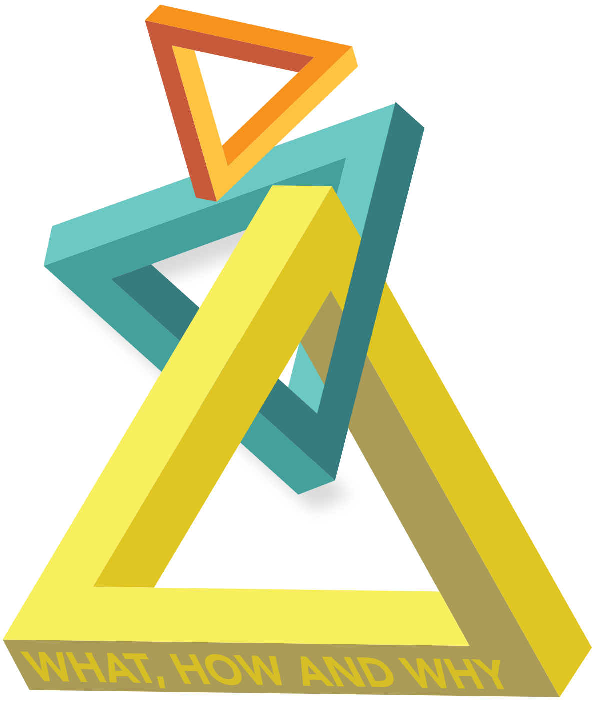
Horizontes Educativos

INVESTIGACIÓN



QUÉ, CÓMO Y POR QUÉ:

una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

WHAT, HOW AND WHY:

an international conversation on mathematics teacher learning

ARMANDO SOLARES ROJAS, A. PAULINO PRECIADO BABB
KRISTA FRANCIS *(Coordinadores)*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Horizontes Educativos

Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning

Coordinadores
Dr. Armando Solares Rojas (UPN)
Dr. A. Paulino Preciado Babb (UdeC)
Dra. Krista Francis (UdeC)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSITY OF CALGARY
WERKLUND SCHOOL OF EDUCATION

Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning

Coordinadores
*Dr. Armando Solares Roja*s (UPN)
Dr. A. Paulino Preciado Babb (UdeC)
*Dra. Krista Franci*s (UdeC)

Primera edición, diciembre de 2014

Esta edición es propiedad de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco número 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, CP 14200, México, DF.
www.upn.mx
Esta obra fue dictaminada por pares académicos
ISBN Universidad Pedagógica Nacional 978-607-413-194-9
ISBN Universidad de Calgary 978-0-88953-378-3

QA10.5
Q4.2 Qué cómo y porqué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas=Wath, how and why : an internacional conversation on mathematics teacher learning / coord. Armando Solares Rojas. - México: UPN/UdeC, 2014.
1. texto electrónico (204 p.) : 7.7 Mb : archivo PDF
ISBN: 978-607-413-194-9
ISBN: 978-0-88953-378-3

1. Maestros de matemáticas en servicio, Formación de
I. Solares Rojas Armando, coord.

CAPÍTULO V / CHAPTER V

CAMBIOS EN EL CONOCIMIENTO SOBRE LA PROPORCIONALIDAD. UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE DOCENTES EN SERVICIO

Carmen Oliva Gutiérrez, Alicia Ávila Storer

Resumen

Presentamos los resultados de una experiencia de formación continua en la que trabajamos el tema de *la proporcionalidad y su enseñanza*, con el fin de caracterizar los procesos de cambio en el conocimiento de los profesores participantes, e identificar las características y condiciones de la experiencia favorables al cambio. Sustentamos la investigación en dos ideas principales: *a)* si los profesores se acercan a los contenidos matemáticos que deben enseñar, mediante la resolución de problemas y el intercambio de ideas en torno a su resolución, pueden modificar y enriquecer los conocimientos matemáticos y pedagógicos implicados; *b)* la participación del conjunto de los profesores de una escuela favorece cambios en el conjunto de la comunidad escolar. Los resultados permiten confirmar nuestra primera idea; de la segunda tenemos sólo algunos indicios.

Palabras-clave: proporcionalidad, formación y actualización de maestros, educación primaria, construcción social del conocimiento.

Abstract

Here we present the results of a continuous formation experience where we worked with *proportionality and its teaching*. We based the research in two basic ideas: the first one was that if teachers get nearer the mathematical content that they have to teach, through problem resolution and exchanging the ideas used for its resolution, they can modify and increase their mathematical and pedagogical knowledge implied; the second was that the participation of all teachers in a school promotes changes in the scholarly community as a whole. Our results allow us to confirm our first idea, but for the second we have just some circumstantial evidence.

Introducción

En el presente capítulo damos cuenta de un proceso de formación continua de profesores al interior de una escuela pública en la Ciudad de México, donde se trabajó el tema *La proporcionalidad y su enseñanza* con el conjunto de los docentes. La investigación, de corte cualitativo, se realizó dentro del programa de posgrado de la Universidad Pedagógica Nacional, en un momento en que los profesores de educación básica y su quehacer son cuestionados debido a los bajos puntajes que los estudiantes han obtenido en las pruebas nacionales e internacionales de matemáticas. El trabajo se basa en la premisa, ya internacional, de que la formación continua de los profesores en servicio es un elemento indispensable para mejorar la práctica docente y el aprendizaje de los alumnos. También consideramos que no cualquier tipo de formación es pertinente, y que no todas las condiciones de su implementación son igualmente productivas. Aquí tratamos de ofrecer elementos para identificar algunas condiciones favorables a dicha formación.

La formación continua de profesores en México

Perspectiva de la Secretaría de Educación Pública

La Secretaría de Educación Pública (SEP) creó en 1995 el Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica (Pronap), con el propósito de ofrecer distintas experiencias de formación y, de este modo, mejorar la calidad de la educación. Para matemáticas se diseñó el curso nacional "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", el cual proyectó preparar a los profesores para que respondieran a las nuevas demandas didácticas del enfoque de enseñanza de dicha disciplina. Este curso dejó de ofrecerse hace varios años.

En la actualidad existe una oferta reducida de cursos de actualización en matemáticas. Del total de títulos registrados en el año 2012 (1115) sólo 50 corresponden a esta área, y la mayoría (32) busca actualizar a los docentes en el enfoque por competencias, introducido con la reciente reforma a la educación básica (SEP, 2011). Estos cursos, aunque son un requisito para evaluar a los docentes en el programa Carrera Magisterial,[1] son opcionales.

[1] Programa establecido en México en 1993 para apoyar a los docentes económicamente por su trabajo y actualización. Para ingresar o ascender en cualquiera de sus cinco niveles [A, B, C, D y E], los profesores deben cubrir una serie de requisitos: permanencia en el nivel [tres o cuatro años], antigüedad, preparación profesional, cursos de actualización, desempeño profesional [trabajo realizado durante un ciclo escolar], aprovechamiento escolar [examen a sus alumnos]. El puntaje mínimo para promoción varía cada año.

La SEP considera la formación continua de los profesores como:

> Un conjunto de actividades que permite desarrollar nuevos conocimientos y capacidades a lo largo de su ejercicio profesional y perfeccionarse después de su formación inicial. Consiste en la actualización y capacitación cultural, humanística, pedagógica y científica con el fin de mejorar permanentemente su actividad profesional (SEP-SEBYN-CGAYCMS, 2006).

Desde tal perspectiva, podemos afirmar que en México no existe una oferta suficiente de formación en matemáticas y su enseñanza para los profesores de educación primaria en servicio. Por otra parte, caben las siguientes preguntas: ¿estos programas, o al menos algunos de ellos, han logrado cambios y mejoras en la práctica cotidiana de los profesores?; de existir esas mejoras, ¿cuáles son las características de los cursos que parecen favorecerlas? Estas preguntas –aún sin respuestas claras– justifican experimentar propuestas que contribuyan a mejorar los aprendizajes matemáticos que, por ahora, son bastante magros, según las diversas pruebas nacionales e internacionales aplicadas a los alumnos de educación básica (Excale, ENLACE y PISA). [2]

Importancia de la formación continua en matemáticas

Desde hace más de tres décadas la preparación de los docentes se ha considerado un factor importante para mejorar el aprendizaje escolar. En México, algunos investigadores sugieren trabajar con los profesores para mejorar sus conocimientos, tanto disciplinares

[2] En la competencia matemática que mide la prueba PISA, México se sitúa en el nivel 1 (el más bajo) con 419 puntos, obtenidos en 2009. Con este puntaje, de acuerdo con la OCDE, un poco más de la mitad de los estudiantes que terminan la primaria sólo son capaces de resolver preguntas muy bien definidas, con instrucciones directas en situaciones explícitas (SEP, 2011a).

como pedagógicos, pues señalan que la mayoría de ellos no cuenta con una formación sólida en matemáticas (Block, 1995; Ávila, 2006; Parada, Figueras y Pluvinage, 2009).

Respecto del manejo de la proporcionalidad, quien ha explorado el conocimiento de algunos docentes sobre este tema, reporta que dichos conocimientos son 'imprecisos' o 'insuficientes' (ver Block, 2006).

Asimismo, la observación de la actividad matemática en aulas de escuelas comunes, ha llevado a señalar que profundizar el conocimiento de los conceptos vinculados a la proporcionalidad, por parte de los docentes, puede potenciar las acciones constructivistas de aquéllos interesados en desarrollar desde este enfoque el pensamiento proporcional en sus alumnos, pues el dominio del tema determina, en buena medida, las tareas que propondrán en sus clases de matemáticas (ver Ávila, 2006). Es decir, que los procesos de formación ofrecidos a los profesores sobre el tema que nos ocupa, no han sido satisfactorios según los resultados obtenidos.

LA PROPORCIONALIDAD COMO CONTENIDO ESCOLAR

Los profesores en servicio tienen como referente principal los desarrollos curriculares plasmados en programas y libros de texto. El aprendizaje de la proporcionalidad directa (en adelante, proporcionalidad) en el currículo de educación primaria en México, se propone en forma explícita a partir del cuarto grado (SEP, 2011).[3] Empero, a pesar de que los profesores la consideran un tema importante (Gutiérrez, 2008) dado el tiempo que se le dedica en las escuelas, las pruebas estandarizadas (PISA, Excale y ENLACE) mues-

[3] La secuencia y el enfoque de enseñanza de las proporcionalidad a la que nos referimos se planteó ya en los programas y libros de texto incorporados en la reforma de 1993 (SEP, 1993); dicho enfoque y secuencia fueron retomados con algunas modificaciones en la reforma de 2011 (SEP, 2011).

tran que las habilidades matemáticas ligadas a la proporcionalidad no se desarrollan de manera satisfactoria en los alumnos. Por ejemplo, en la última prueba Excale, aplicada a niños de sexto grado de primaria, de la que se tiene información pública (INEE, 2009), los promedios de aciertos son bastante insatisfactorios.

Contenido del reactivo	Porcentaje de aciertos
Identificar la relación entre los datos de una tabla de variación proporcional	79%
Resolver problemas que impliquen calcular un valor faltante en tablas cuando el factor de proporcionalidad es decimal	71%
Reconocer una tabla de variación proporcional	69%
Identificar la relación entre los datos de una gráfica de variación proporcional	62%
Resolver problemas de variación proporcional	57%
Resolver problemas de valor faltante en tablas, con factor de proporcionalidad fraccionario.	52%
Interpretar la información de una gráfica de variación proporcional	47%
Identificar la tabla de variación proporcional correspondiente a una gráfica	44%
Resolver problemas mediante tablas de variación proporcional	23%

Figura 1. Porcentajes de aciertos en reactivos de la prueba Excale 6 (ciclo 2008-2009), vinculados a la proporcionalidad.

Es probable que los porcentajes anotados en los primeros renglones de la tabla no se consideren deficientes; sin embargo, al incorporar en los problemas razones fraccionarias u otro tipo de dificultades (como distractores, o planteamientos menos directos), los porcentajes bajan drásticamente.

Desde hace tiempo sabemos que el desarrollo del pensamiento proporcional implica un largo proceso que culmina con la comprensión y el uso significativo de la constante de proporcionalidad.[4]

[4] No nos referimos aquí al enfoque piagetano, que definió de otra manera el dominio de la proporcionalidad, sino a las ideas que han arrojado los enfoques de orientación más didáctica.

En dicho proceso, el uso de relaciones internas (relaciones al interior de cada una de las magnitudes involucradas) para interpretar y solucionar los problemas es el más intuitivo. Lograr que los alumnos utilicen la relación funcional de manera significativa para resolver este tipo de problemas, requiere un proceso de enseñanza intencionado, que conlleva una modificación sistemática de los problemas que se planteen, tanto en las relaciones implicadas como en la forma de su presentación.

Ante estas consideraciones, la promoción del aprendizaje de la proporcionalidad en la primaria mexicana se inicia con la resolución de problemas sencillos del tipo valor faltante, que es posible resolver mediante estrategias basadas en el manejo de relaciones internas o escalares (ver Vergnaud, 1985), y a partir del cálculo de mitades, dobles, triples, etc., de las cantidades involucradas. Posteriormente, se promueve la solución de problemas un poco más complejos, mediante el uso de lo que Fernández, Llinares y Valls (2011) llaman 'enfoque constructivo' (fundamentado en la propiedad $f(x+y) = f(x) + f(y)$).

El uso de este enfoque genera estrategias más elaboradas que la simple duplicación, triplicación, o división por dos de los valores conocidos. Estas estrategias se basan también en relaciones escalares, pero las soluciones se obtienen mediante composiciones (sumas o restas) de los valores conocidos y/o de las mitades y dobles de esos valores al interior de una magnitud, para después hacer lo mismo con los valores correspondientes en la otra magnitud.

Así, de manera progresiva se modifican las situaciones propuestas para que los alumnos exploren nuevas formas de solución hasta que sea indispensable hacer uso de la constante de proporcionalidad para obtener las soluciones, cuestión que se propone en los últimos grados de la educación primaria.

Por otra parte, el hecho de que las razones (internas o externas) sean enteras o fraccionarias también entraña niveles de dificultad diferentes en las que son necesarias estrategias distintas para la resolución (Vergnaud, 1985). Este es otro aspecto considerado en los programas y libros de texto de matemáticas para diseñar las secuencias de actividades y problemas, y con ello promover el aprendizaje de la proporcionalidad.

Como podrá verse, el enfoque propuesto desde 1993 en programas y libros de texto es complejo, y en los programas de actualización docente estas cuestiones no se han tratado con suficiente profundidad. Nuestra hipótesis al iniciar el trabajo, del que deriva este escrito, era que los profesores no contarían con los conocimientos matemáticos especializados necesarios, ni con una "mirada didáctica" (ver Fernández, Llinares y Valls, 2011) aguda para gestionar con éxito las tareas matemáticas derivadas de él.

La investigación

La investigación se realizó con base en un proceso de formación de profesores en servicio que llamamos *La proporcionalidad* (como conocimiento matemático escolar) *y su enseñanza* (conocimiento pedagógico), el cual se diseñó en forma de taller en una escuela primaria pública de la Ciudad de México.[5]

Durante el desarrollo del taller analizamos los procesos de cambio en el conocimiento de los profesores, y las condiciones que favorecen dicho cambio. Elegimos la proporcionalidad porque, como ya lo señalamos, en la oferta de cursos de actualización es un tema casi ignorado y, además, los profesores participantes manifestaron interés por estudiarlo pues, según la opinión dominante, los alumnos no lo comprenden con facilidad, y esto dificulta su enseñanza.

Posteriormente, se analizó el proceso de aprendizaje de los participantes en dos vertientes: *a)* la correspondiente a la proporciona-

[5] En adelante, para simplificar el lenguaje, nos referiremos al conocimiento matemático escolar (o conocimiento especializado sobre el contenido, en los términos de D. Ball y sus colegas, 2008), simplemente como conocimiento matemático, o conocimiento del contenido.

lidad como conocimiento matemático escolar, y *b)* el conocimiento pedagógico sobre el tema (elementos para su enseñanza).

La planeación, desarrollo y análisis del proceso de formación se sustentó en los siguientes supuestos:

1. Los conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre la proporcionalidad con que cuenta la mayoría de los docentes participantes, no son suficientes para implementar el enfoque y la secuencia didáctica propuestos en el currículum oficial.
2. Los contenidos que los profesores deben enseñar son de su especial interés, lo que motiva la participación activa en los procesos de formación que abordan dichos contenidos.
3. El intercambio de ideas y el análisis de experiencias al resolver problemas vinculados al currículum, con la participación de "alguien que sabe más", producirá modificaciones positivas en los conocimientos de los profesores participantes.
4. Un proceso de formación compartido por el conjunto de docentes de una misma escuela, resultará más provechoso que aquél realizado en forma individual o en grupos de docentes de diversas escuelas.
5. El cambio en los conocimientos disciplinares y pedagógicos que se logren mediante este proceso de formación, favorecerá no sólo en las prácticas de enseñanza de cada uno de los docentes, sino también en su participación en la comunidad de profesores constituida al interior de la escuela.

Características del proceso de formación

- El taller se efectuó dentro de la jornada laboral: siete reuniones de 2 horas 30 minutos cada una, realizadas el último viernes del mes, aprovechando la sesión del Consejo Escolar.
- Se trabajó con base en resolución de problemas orientados a ampliar la comprensión de la proporcionalidad y su enseñanza.

- Se planearon actividades, estrategias y materiales que promovieron el análisis del tema y de la práctica de enseñanza de los profesores.
- Con el fin de incluir aspectos conceptuales que acompañaran los avances en el aprendizaje, se analizaron artículos cortos y de fácil lectura sobre la proporcionalidad, su aprendizaje y su enseñanza. De hecho, adaptamos o recortamos algunos ya publicados para hacerlos más accesibles a los participantes, ya que en una encuesta previa detectamos poco interés por los cursos que incluyeran lecturas.
- Se realizaron también actividades vinculadas a las tareas profesionales de los profesores (Llinares, en Giménez *et al.*, 1996): análisis de libros de texto, planeación de actividades y secuencias de enseñanza.
- El trabajo se organizó de manera individual o en pequeños grupos, después los docentes compartían resultados y elaboraban conclusiones en sesión colegiada.
- La función de la coordinadora del taller consistió en proponer situaciones y actividades de aprendizaje, promover la reflexión, incorporar aspectos conceptuales vinculados a las tareas realizadas, así como la discusión en los pequeños grupos y en las sesiones colegiadas; también realizaba una síntesis de los conocimientos trabajados en cada sesión.

Conceptos vinculados a la proporcionalidad trabajados en el taller

Los conceptos abordados se definieron con base en nuestras hipótesis acerca de los aspectos de la proporcionalidad, que es importante conocer en tanto conocimiento matemático escolar. Estos aspectos son los siguientes: comparación absoluta y relativa, razón, proporción, relación escalar y funcional, constante de proporcionalidad, gráficas de situaciones proporcionales y no proporcionales, así como tablas de variación proporcional y su utilidad para aprender y enseñar este contenido; también se analizaron algunas estrategias de enseñanza y los procesos cognitivos de los niños respecto al aprendizaje de la proporcionalidad.

Como ya hemos señalado, en el taller se incluyó lo que suele llamarse conocimiento matemático escolar y conocimiento pedagógico del contenido (en este caso, sobre la proporcionalidad). El primero se refiere al contenido matemático en sí, pero no al contenido que cualquier persona maneja, sino a una forma específica que lo convierte en objeto escolar, tal como lo señalan Hill, Ball y Schilling (2008), mientras que el segundo conocimiento implica el contenido en relación con los alumnos y con los recursos para ayudar al aprendizaje: cómo lo aprenden, qué dificultades tienen para aprenderlo, qué errores cometen al acercarse a dicho conocimiento, así como las formas en que es posible ayudarlos para que lo aprendan de manera adecuada (ver Hill, Ball y Schilling, 2008).

En este escrito presentamos sólo el análisis del conocimiento matemático de la proporcionalidad que fueron construyendo los profesores participantes. Para hacerlo, nos basamos en el discurso que se fue elaborando en torno a dicho tema durante el taller.

Algunos datos sobre la escuela e intereses de los profesores participantes

La escuela donde se llevó a cabo el taller es de tiempo completo,[6] y se eligió por la disposición del grupo docente para participar en la experiencia. La escuela está inscrita en el Programa Escuelas de

[6] Las escuelas de tiempo completo son un modelo educativo que pretende, con la ampliación del horario –8:00 a 16:00 horas–, modificar las prácticas escolares al trabajar con la participación activa de los alumnos y llevar a cabo actividades de actualización docente en las reuniones de Consejo Técnico.

Calidad[7] y goza de "buena fama" en su zona escolar; los resultados que ha obtenido en la prueba ENLACE son superiores a los 580 puntos.[8] Tiene 14 docentes frente a grupo, sólo dos son varones, cinco cuentan con estudios de licenciatura, 10 están inscritos en el programa Carrera Magisterial y 12 tienen más de 20 años de servicio. Todos manifestaron interés en actualizarse, pero no tienen tiempo libre para ello; la mitad sugirió programar cursos o talleres dentro del horario laboral; todos propusieron cursos prácticos (dinámicos, con actividades para aplicar en su grupo). Los profesores manifestaron interés por recibir material, estrategias y actividades útiles para la enseñanza; la mitad sugirió "poca teoría", y cinco profesores prefieren "sin teoría"[9] (ver Gutiérrez, 2008). Estos resultados coinciden con otros estudios hechos en México (por ejemplo, Estrella, 2003; Díaz, 2006). Por tanto, consideramos conveniente tomarlos en cuenta al plantear el proceso de formación.

Actividades trabajadas en las sesiones del taller

Las sesiones del taller se planearon con actividades para enriquecer el conocimiento matemático y pedagógico de los participantes, y motivar el análisis de la práctica docente. En cada sesión se propuso:

- *a)* la resolución de un problema que implicara la noción de proporcionalidad;
- *b)* análisis de la forma en que cada uno lo resolvió y la elaboración de hipótesis sobre cómo lo resolverían sus alumnos;

[7] Programa que pretende mejorar los resultados educativos mediante apoyos adicionales a los planteles.

[8] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). El puntaje máximo es de 800 puntos y es un deseo oficial no cumplido que las escuelas alcancen 600 puntos.

[9] Por 'teoría' se referían a textos que aborden conceptos matemáticos o didácticos, pero sin actividades que puedan aplicarse en el aula.

c) formulación de preguntas adecuadas para el grado que atienden, útiles para promover en los niños la comprensión de los problemas y su resolución, y
d) lectura de un texto breve para aclarar o complementar el conocimiento especializado sobre proporcionalidad.

La planeación y desarrollo de las actividades se adaptaron, incluso se modificaron, después de analizar los resultados de cada sesión.

Recolección de evidencias

Para la recolección de evidencias se realizaron las siguientes actividades:

- Aplicación de un cuestionario inicial (a manera de un diagnóstico).
- Videograbación de cada sesión.
- Recolección de tareas escritas (problemas resueltos, observaciones al trabajo de sus alumnos y descripciones de su práctica).
- Evaluación de cada sesión para apoyar la planificación de las siguientes.
- Cuestionario final como evaluación general del taller.

El discurso de los docentes que se generó en cada sesión sobre el conocimiento de la proporcionalidad, fue un insumo fundamental para la indagación sobre sus procesos de aprendizaje. El conocimiento inicial, así como las modificaciones en éste, lo ponderamos con base en dicho discurso. Para efectuar el análisis, procedimos de la siguiente manera: se ordenaron cronológicamente fragmentos del discurso que mostraran tanto los intercambios ocurridos como el proceso de cambio que tuvo lugar. La selección de los fragmentos se realizó considerando que éstos:

a) tuviesen significado en sí mismos, es decir, que expresaran ideas completas sobre el tema;
b) refirieran a la proporcionalidad en tanto conocimiento matemático escolar y fueran relevantes en función de los objetivos de la investigación;
c) permitieran comparar las ideas iniciales con las que se fueron construyendo a lo largo del proceso.

Cambios observados en el conocimiento sobre la proporcionalidad

Ideas iniciales de los docentes: dificultades para identificar situaciones proporcionales y no proporcionales

Con el fin de identificar el conocimiento de los profesores acerca del tema, al iniciar el taller resolvieron en forma individual un cuestionario, cuyos resultados se discutieron después. En ese momento, los profesores tuvieron dificultades importantes para: 1) diferenciar situaciones de proporcionalidad de otras que implicaban comparaciones aditivas; 2) utilizar adecuadamente estrategias convencionales de solución de los problemas planteados; 3) identificar, de entre varias gráficas, aquellas que representaban una situación de proporcionalidad de otras que no tenían una relación de este tipo entre los datos.

Pocos profesores se consideraron conocedores del tema (4 de 13), el resto manifestó no estar familiarizado con él porque no lo trabajaban con su grupo:

> "Ahorita me costó trabajo resolver los problemas porque atiendo segundo grado."
> "Durante mucho tiempo he dejado de dar clase a quinto y sexto, son[…] como temas nuevos para mí."
> "Es un tema 'nuevo' para los que no atienden quinto y sexto grados, por ello es también un tema difícil de explicar."

Llama la atención que estas respuestas provengan de profesores de tercero y cuarto grados, puesto que el tema se inicia en este último mediante tablas de valores proporcionales.

En los hechos, el conocimiento de todos los profesores participantes fue insuficiente para trabajar el enfoque propuesto en programas y libros de texto. Una muestra de esto es que, como se comentó antes, en general no diferenciaron, de entre varios problemas, los vinculados a la idea de proporcionalidad y los que implicaban una comparación aditiva.

El problema 1 (ver figura 2), por ejemplo, implica una comparación de razones (para concluir que las velocidades no son iguales). Sin embargo, los docentes no consideraron resolverlo mediante la idea de proporcionalidad y, en general, fracasaron en sus intentos de resolución. En cambio, se clasificó como de proporcionalidad el problema 2.

<table>
<tr><th>Problema 1</th><th colspan="6">Problema 2</th></tr>
<tr><td rowspan="3">“Marcos es ciclista y recorre 25 km en 20 minutos. Lucía también es ciclista y recorre 20 km en 15 minutos. ¿Quién lleva mayor velocidad?”</td><td colspan="6">“Observa la tabla y contesta: ¿Cuántos años tendrá Pedro cuando Juan tenga 24 años?”</td></tr>
<tr><td>Edad de Juan</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Edad de Pedro</td><td>12</td><td>16</td><td>24</td><td>28</td><td>?</td></tr>
</table>

Figura 2. Problemas planteados en el cuestionario al inicio del proceso de formación.

La conservación de una relación aditiva –como la que existe entre las edades de Juan y Pedro– fue suficiente a los docentes para considerar que la situación era proporcional. Tal vez presentar los datos en una tabla favoreció esta interpretación, puesto que según nos percatamos después, los docentes le dan gran valor a las tablas para enseñar la proporcionalidad, ya que en los libros de texto este recurso aparece con frecuencia en esta clase de problemas.[10]

[10] Las dificultades para identificar ciertos problemas como de tipo aditivo por parte de maestros en formación, ha sido reportada por otros investigadores (Fernández, Llinares y Valls, 2011), y la hemos constatado en un proceso de formación de docentes en servicio que realizamos actualmente. Parece entonces necesario profundizar en torno a las causas que provocan dicha dificultad.

La representación gráfica de una situación proporcional (o no proporcional) resultó ser otro tema desconocido para la mayoría de los profesores participantes, quienes tampoco clasificaron de manera correcta (como representación de una situación de proporcionalidad o de no proporcionalidad) las siguientes gráficas:

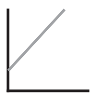
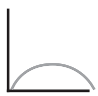
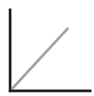
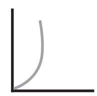
Viaje en taxi	Lanzar una piedra	Precio de un producto	Número de amibas
Tarifa en pesos	Altura	Peso	# de amibas
			
Distancia en metros	Tiempo	Costo	Tiempo

Figura 3. Gráficas y situaciones incluidas en el cuestionario inicial del taller.

En resumen: al iniciar el proceso de formación, los profesores mostraron poco conocimiento respecto de las situaciones que implican proporcionalidad, así como dificultades importantes para diferenciar de aquéllas los problemas que presentaran relaciones aditivas. Las dificultades también se observaron en la representación de las situaciones mediante gráficas.

Inicios en el cambio de conocimiento: diferenciación entre la comparación aditiva y la multiplicativa y desarrollo de algunas estrategias de solución

La interacción en torno a los primeros problemas planteados marcó los inicios del cambio en las ideas de los profesores sobre la proporcionalidad. La discusión se centró en los dos problemas que se incluyen en la figura 4:

Problema 3	Problema 4
a) "Ana quiere comprarse unas calcetas que valen 20 pesos. Su madre queda con ella que pagará 2 pesos por cada 3 que pague Ana. ¿Cuánto dinero debe poner Ana para comprarse las calcetas?"	*b)* "Hace 5 años un árbol de mangos medía 8 m y un árbol de naranjas medía 10 m, en la actualidad el árbol de mangos mide 14 m y el de naranjas mide 16 m. Después de cinco años, ¿qué árbol ha crecido más?, ¿qué árbol consideras que ha tenido un crecimiento más lento en estos cinco años?"

Figura 4. Problemas propuestos al iniciar el proceso formativo.

El problema 3 es del tipo que Lamon (1993, cit. por Alatorre, 2004) llama *parte-parte-todo,* en su definición refiere a contextos en los que la cardinalidad de un subconjunto se da en términos de las cardinalidades de dos o más subconjuntos de los que está compuesto el todo.

El problema 4 presenta otras características: busca hacer notar la diferencia entre la comparación absoluta (aditiva) y la relativa (razón) y entre las cantidades, y propicia que los participantes valoren, en una situación concreta, el sentido de ambas comparaciones y la relevancia de diferenciarlas.

Al resolver los problemas, los profesores mostraron que conocen (en acto) y utilizan mejor las relaciones entre un mismo tipo de cantidades (razones internas) y la comparación absoluta, mientras que se les dificulta la comparación relativa y las relaciones funcionales (relaciones entre los dos tipos de cantidades involucradas); nadie utilizó alguna estrategia que permitiese suponer atención en esta última relación.

El problema 3, cuya estructura proporcional parecía más evidente, se resolvió con cierta facilidad haciendo uso de estrategias intuitivas, como la sustentada en la elaboración de una tabla de valores proporcionales (ver figura 5).

Ana	Mamá de Ana	Dinero reunido para las calcetas
3	2	5
6	4	10
9	6	15
12	**8**	**20**

Figura 5. Solución al problema 3 "Las calcetas de Ana".

La facilidad del problema fue expresada por más de un participante:

> [Este problema es] uno de los más sencillos porque para resolverlo es con una tabla de variación proporcional. Cuando Ana ponga tres pesos su mamá pone dos pesos. Si Ana duplica la cantidad, su mamá también la duplica, entonces va aumentando, es una tabla de variación proporcional (Adriana 4 –el número indica el grado que atendía–).

En este problema no se logró un planteamiento "formal" para obtener la solución, pues en todas las soluciones se aplicaron estrategias intuitivas. Hubo quien utilizó la regla de tres, como Ignacio 6, quien consideró que la resolución de este problema podría ser más fácil *con regla de tres, 8 es a 12 como 6 es a 4,* pero sus compañeros no estuvieron de acuerdo y le interrogaron:

> ¿Ocho?, ¿de dónde sacaste el doce?, tú no tienes el doce, lo primero que sabes es la relación que hay entre dos y tres, no entre doce y ocho, entonces ¿cómo aplicas la regla de tres?
>
> Ignacio 6 incluye un planteamiento con datos no explícitos en el problema ("8 es a 12 como 6 es a 4") y sus compañeras le cuestionan por qué ocupa números que no están inicialmente en el problema. Ignacio 6, al no poder justificar su procedimiento comenta: "Bueno, fue la comprobación", y ya no intenta convencer a sus colegas de la pertinencia (o no) de su solución (Ignacio 6).

La discusión referente a la solución del problema 3 concluye sin resolver las dudas. Sin embargo, en torno al problema 4 se originó una extensa discusión, la cual ayudó a avanzar al grupo en el conocimiento. En seguida anotamos un fragmento del intercambio de ideas entre todos los miembros del grupo. En un primer momento, parecía existir un acuerdo en que los árboles crecían en la misma proporción (prevalecía la comparación aditiva), pero había desacuerdo en la respuesta a la segunda pregunta: *¿Qué árbol consideras que ha tenido un crecimiento más lento en estos cinco años?* Ignacio 6 estaba en otro punto del proceso de reflexión, su conocimiento parecía estar en un nivel más avanzado en comparación con el de sus colegas, y los presionaba a comprobar sus respuestas y motivar la reflexión. Insistía:

> Ignacio 6: Entonces, ¿qué árbol ha crecido más, ninguno?
> Isabel 4: Yo considero que la respuesta puede ser que han crecido lo mismo: 6 metros. La diferencia está en que no empezaron en la misma altura.
> Elena 3: [Es decir] Que uno creció más rápido que otro.
> Ignacio 6: ¿Y cuál es la respuesta?

Aquí los participantes en el diálogo muestran que han incorporado la idea de comparación relativa: "La diferencia está en que no empezaron en la misma altura". Pero Ignacio 6, insatisfecho por las respuestas de sus compañeras, explica la forma en que relacionó las cantidades, y menciona que los árboles no crecieron en la misma proporción. Uno (el de naranjas) creció más lento que el otro (el de mangos):

> Es que a mí [primero] se me ocurrió que la relación es que crecen igual [6 metros cada uno]. La misma proporción de 6, sí, pero luego me pregunté: ¿qué tanto es 14 de 8 y qué tanto es 16 de 10?, comparé las dos fracciones [8/14 y 10/16] y resulta que el que creció más lento fue el de naranjas.

La intervención de Ignacio 6 muestra: *a)* la interpretación inicial basada en una relación absoluta, aditiva ("Se me ocurrió que crecen igual, es decir, 6 metros cada uno"); *b)* la interpretación multiplicativa lograda en un segundo momento ("Pero luego me pregunté: ¿qué tanto es 14 de 8 y 16 de 10?"). Esto es, se observa el tránsito de la interpretación aditiva a la multiplicativa.

La explicación de Ignacio6 provocó nuevas reflexiones y alentó a otros colegas a exponer la forma en que obtuvieron la respuesta. En este momento, al igual que Ignacio 6, Melba 1 propuso dar solución al problema comparando las cantidades en forma relativa, pero empleó porcentajes en lugar de fracciones:

> Son árboles independientes. El de mangos tenía 8 metros y creció a 14, entonces 8 es el 100% del árbol, después aumentó a 14; 6 metros más. Esos 6 metros ¿qué porcentaje son de los 8? Entonces los 6 metros son a X [como 8 es a 100], me dio 75%. Los mangos crecieron 75% de lo que ya tenían. Con el de naranjas hice lo mismo. Los 10 metros son el 100% y los 6 metros que aumentó, ¿qué porcentaje es? Me da 60%. Entonces, las naranjas crecieron 60% y los mangos 75%.

Esta estrategia resultó más comprensible al grupo, y al concluir la discusión se había aclarado la diferencia entre la comparación absoluta (aditiva) y la comparación relativa (basada en el cociente) a partir del problema planteado. También aparecieron dos estrategias para resolver situaciones que implican este último tipo de comparación: fracciones y porcentajes.

Hemos observado que la resolución de los problemas mostró el nivel de conocimiento que tenían los participantes sobre la proporcionalidad al iniciar el taller: insuficiente para resolver correctamente los problemas planteados, pero los intentos de solución y la discusión contribuyeron a su comprensión y solución.

El problema 4 resultó más difícil de interpretar, pero la inclusión de dos preguntas, una referente a la comparación absoluta y otra a la relativa, favoreció la diferenciación de los dos tipos de comparación. Conviene señalar, sin embargo, que el intercambio y discusión sobre las soluciones obtenidas –y no la simple situación y su solución–, permitió identificar y diferenciar estos dos tipos de comparación.

No nos vamos a extender en exponer cada uno de los cambios en el conocimiento logrados en el proceso, pero es conveniente señalar que si bien al inicio fue casi nula la comprensión de las gráficas presentadas (figura 3), más adelante éstas fueron incluso sugeridas como herramienta para resolver problemas cuya interpretación resultaba difícil. En efecto, este avance se observa después, cuando en un pequeño grupo se reconoce la utilidad de las gráficas como herramienta que permite definir si una situación es proporcional o no.

Se discute en torno a una situación de juegos de globos donde interviene el azar:

> Gaby 6: Yo digo que sí hay proporción.
>
> Ignacio 6: Lo podemos comprobar con una gráfica.
>
> Lucía 5: Pero aquí es azar, no podemos saber cuántos globos vamos a romper…
>
> Ignacio 6: Vamos a comprobarlo con una gráfica […].

Hacia una mayor comprensión de la proporcionalidad: incorporación paulatina de nociones como relaciones escalares y funcionales

Como ya lo mencionamos, en un principio los docentes usaron con mayor facilidad las relaciones internas (o escalares), que las externas (o funcionales). Posteriormente, se introdujeron de manera explícita las nociones *relación escalar* y *relación funcional*, a través de una lectura sencilla que los vinculaba tanto a ejemplos familiares como a lo que los profesores habían hecho para encontrar la solución a los problemas.

Las ideas no se comprendían ni se formulaban con facilidad. Por ejemplo, después de varias preguntas y respuestas, Lucía 5 explica lo que entiende por ‘relación escalar’ de la siguiente manera:

> Cuando se da la relación entre cantidades de la misma magnitud, es decir, organizar kilos de un lado y precios del otro. La relación escalar es eso: poner naranjas con naranjas y pesos con pesos.

Lucía 5 enfatiza las dos magnitudes implicadas en la situación, pero no dice nada acerca del tipo de relaciones que se establecen; Ignacio 6, quien parece tener mayor conocimiento al respecto, expresa de manera más completa su comprensión de la relación funcional:

> Es la relación de magnitudes diferentes. Nosotros lo estábamos viendo en forma horizontal [se refiere a la disposición de los datos como aparecen comúnmente en una tabla de valores proporcionales]. Una magnitud son las naranjas y otra magnitud es el costo. A esa relación, a ese vínculo entre cantidades se le llamaría funcional. Vuelvo a llegar al valor unitario a través de ese razonamiento, en la comparación de esas cantidades.

La adquisición difícil de un nuevo lenguaje

La introducción de los términos "formales" a través de las lecturas fue provechosa. En diferentes momentos, los participantes procuraban comprender los conceptos –'nuevos' para ellos–; por ejemplo, Leticia AP (Artes Plásticas) busca confirmar la forma en que considera se puede reconocer la relación escalar y la funcional, y se dirige a la coordinadora: *¿Entonces, funcional es horizontal y escalar es vertical?* (se refiere a la disposición de los datos en las tablas de cantidades proporcionales).

La coordinadora enfatiza el sentido de la relación que se establece en y entre magnitudes distintas, sin tomar en cuenta la disposición de los datos en una tabla, cuestión que está en la base del razonamiento de Leticia AP.

En otro momento (3ª sesión) se emprendió un diálogo en torno a una tabla de cantidades proporcionales; este diálogo muestra los esfuerzos por comprender la proporcionalidad y utilizar el lenguaje recién aprendido –aunque no del todo comprendido– sobre este tipo de relaciones:

> Lucía 5: (Lee) las cantidades anotadas en la tabla no son proporcionales ¿por qué? (ella misma contesta), porque no suben en el mismo ritmo.
> Ignacio 6: ¿No qué?
> Lucía 5: No suben proporcionalmente, no van aumentando igual.
> Ignacio 6: Busca otra palabra.
> Gaby 6: Como dice la maestra, no hay una relación vertical proporcional (en realidad, la maestra no había dicho esto).
> Lucía 5: No se relacionan proporcionalmente.
> Ignacio 6: Busca otra palabra. No hay relación escalar.
> Lucía 5: OK, no hay relación escalar.
> Ignacio 6: Y la otra relación.
> Lucía 5: Pro… este, ¡funcional!
> Ignacio 6: ¡Ándele! (en tono aprobatorio).

Más adelante, después de una discusión sobre el valor que debía tener un tiro de canicas (de un juego de feria) para que pudiera considerarse una situación de proporcionalidad, el pequeño grupo comentó: "Entonces cámbiale: que la constante [la relación entre las dos cantidades correspondientes] sea la misma".

Se observa en estos diálogos, no obstante las limitaciones e incluso errores en el uso del lenguaje, la incorporación de nuevos elementos como constitutivos de la proporción: las relaciones escalares como aquellas que se establecen entre cantidades del mismo tipo y la constante de proporcionalidad, que se establece entre magnitudes diferentes. Si bien estas relaciones parece que no fueron del todo comprendidas y no están bien expresadas, es un buen logro que los profesores se hayan acercado a ellas. Por supuesto, el proceso debería continuar hasta que se eliminaran todas las confusiones, lo cual parece haberse logrado en las últimas sesiones del taller.

Al inicio del taller los profesores no emplearon lenguaje convencional para referirse a los conceptos vinculados a la proporcionalidad. Por ejemplo, utilizaban la relación escalar para resolver problemas, pero al hacer referencia a dicha relación se expresaban de la siguiente manera: "Saqué primero los resultados de esta columna". Al respecto, conviene comentar que los profesores no tenían por qué conocer ese lenguaje, ya que la SEP no lo incluye en los materiales que les proporciona, y tampoco se han impartido cursos al respecto. Sin embargo, como en el taller se consideró el uso del lenguaje, poco a poco fue teniendo mayor presencia en los comentarios: "utilicé la relación escalar porque es más fácil", "yo hice una regla de tres [...] también podría hacerse utilizando la relación escalar, es más práctico para los niños" (5ª sesión). Como se ve en estas participaciones, el lenguaje incorporado permitió aclarar las ideas e hizo más fluido el intercambio.

Otro aprendizaje relevante: el *conocimiento del contenido* escolar tiene repercusiones en la enseñanza

Al inicio del proceso, los docentes se consideraron a sí mismos conocedores de la proporcionalidad, y algunos otros señalaron que sus necesidades docentes respecto de la proporcionalidad, y de las matemáticas en general, eran de tipo pedagógico (cómo enseñarla). Durante el proceso formativo, su perspectiva cambió; mencionaron que, antes de la participación en el taller, no habían reconocido suficientemente la importancia de dominar el tema para poder impartirlo. Consideraban que las dificultades para su aprendizaje por parte de los niños radicaban, no en su propia actuación como docentes, sino en limitaciones inherentes al pensamiento de los alumnos ("para ellos, es difícil entenderla"). No habían considerado que al entender la proporcionalidad y manejarla con mayor facilidad, en tanto que *conocimiento matemático especializado*, podían apoyar mejor el aprendizaje de los alumnos. El siguiente comentario, emitido por la directora, y dirigido a la coordinadora del taller, sintetiza cómo evolucionó este punto de vista:

> Cuando me platicó [usted que el taller sería sobre proporcionalidad] yo dije 'pues qué tan importante puede ser' y descubrí que es básico, es un tema importante que está implícito desde el primer grado, se requiere que se vaya retomando para ir profundizando, porque está implícito en todos los ejes [del programa de matemáticas]. Se veía como algo[…] ¡yo lo percibía como algo muy superficial! cuando es algo muy importante.

En estos comentarios la directora reconoce el valor de entender el contenido, analiza el dominio que los profesores tienen de él y la posibilidad de apoyar mejor el aprendizaje de los alumnos. Otros participantes se adhirieron a esa postura, agregando además sus repercusiones en la planeación de la enseñanza del tema para el grado que se atiende y a lo largo de la educación primaria:

> Para los niños es difícil aprender la proporcionalidad, no es un concepto fácil, por eso requiere [que les planteemos] más actividades en todos los grados (Guille 5).
>
> Qué tanto les estamos dando realmente lo que necesitan […] Si no tienen lo elemental, lo básico, lógicamente no van a darnos respuesta ahorita (Sara NEE, profesora que atiende alumnos con necesidades educativas especiales).
>
> Si en los primeros grados se utilizan mucho las tablas (de proporcionalidad), eso ayuda posteriormente a realizar otro tipo de ejercicios con los niños de otros ciclos (Ignacio 6).

Es posible decir que durante las sesiones los profesores aprendieron, recordaron o aclararon algunos conceptos asociados a la proporcionalidad y usaron un nuevo lenguaje para referirse a las implicaciones conceptuales y didácticas del tema. También reconocieron la importancia de trabajar el concepto en toda la educación primaria, pero con enfoques distintos, derivados de una planificación de la enseñanza. Una evidencia de esto es que al finalizar la tercera sesión del taller, la mitad de los docentes reconocieron como el aprendizaje más relevante *haberse percatado de la continuidad que mantiene el tema de proporcionalidad a lo largo de la escuela primaria*.

La participación de la directora del plantel y la pertinencia de nuestra hipótesis respecto de la importancia de trabajar en una comunidad escolar

Al inicio del trabajo, consideramos que llevar a cabo un proceso de formación con todos los profesores de un plantel sería más provechoso que si cada uno de ellos tomara cursos de manera independiente. Un elemento que parece ser indicador favorable de esta hipótesis, son las participaciones de la directora, quien con sus intervenciones, más como líder que como alguien que está aprendiendo, ayudó en el avance del proyecto formativo. A continuación incluimos tres de sus participaciones como evidencia de su papel en el proceso.

En la sesión inicial –recordará el lector–, la inquietud generada en el conjunto de los profesores, al considerar que no tenían elementos suficientes para resolver los problemas planteados, parecía generar más tensión de la conveniente y estancar el proceso. Sin embargo, un comentario de la directora del plantel permite que la tensión disminuya y que el proceso avance:

> Estamos sacando nuestro nerviosismo ante esto, pero es importante que los conceptos que vertamos sean los que tenemos. Maestros: ¡se vale no saber! [enfatiza fuertemente la frase]. No le tengamos miedo a no saber algunas cosas, por eso estamos aquí.

En el comentario siguiente, realizado en otra sesión del taller, la directora deja ver su preocupación por la dificultad que mostraron los profesores para comprender algunos conceptos vinculados a la proporcionalidad, y considera que el uso del lenguaje matemático ayudará a entenderlos. Su reflexión ante el grupo es la siguiente:

> Necesitamos primero desarrollar este lenguaje matemático. Una de nuestras limitaciones es la formación matemática que recibimos, hablo por mí, pues no nos apropiamos de un lenguaje matemático. Tal vez una de las

> limitantes para comprender es esa. Lo interesante sería apropiarnos ¡ya! de ese lenguaje matemático para llegar a una mayor comprensión (3ª sesión).

La participación de la directora también se orientó a animar a todos los profesores a reconocer su relación previa con la proporcionalidad, como un factor que permitirá una nueva relación con este contenido:

> Se tiene la capacidad, todos tenemos la capacidad, pero siempre faltó el dejarnos resolver y no encuadrarnos a que 'esto se soluciona así'. [Esto] nos limitó y ahora nos cuesta trabajo, pero ya descubrimos que hay muchos caminos para resolver un problema, pero nos cuesta trabajo procesarlo [por nuestras experiencias e ideas previas].

Conclusiones

En concordancia con nuestros supuestos iniciales, observamos que los conocimientos con que los docentes iniciaron el proceso de formación eran escasos, desconocían los conceptos y el lenguaje que ha generado la didáctica de las matemáticas respecto de las proporciones. Este conocimiento era insuficiente para poner en práctica de manera adecuada y con flexibilidad el complejo enfoque constructivo que desde 1993 propuso la Secretaría de Educación Pública para enseñar la proporcionalidad en la escuela primaria mexicana.

La resolución de problemas, la discusión de resultados y las estrategias de solución utilizadas, también conforme a nuestras previsiones, motivaron a los profesores a participar activamente en el taller, y favorecieron la ampliación del conocimiento matemático sobre la proporcionalidad. El proceso significó para los maestros un arduo trabajo cognitivo a partir de los problemas planteados y un intenso intercambio de opiniones e ideas. En el transcurso del proceso, se incorporaron, modificaron o explicitaron algunas nociones, por ejemplo: proporcionalidad, comparación aditiva y multiplicativa, relación escalar y relación funcional, así como el lenguaje vinculado a estos conceptos. El lenguaje mostró ser un instrumento importante para la interpretación de las situaciones de proporcionalidad y un facilitador del diálogo, pero también dejó ver que los profesores tienen dificultades para comprender este tipo de propuestas de enseñanza, que de suyo son bastante complejas.

En general, los docentes participantes coincidieron en señalar que durante el taller lograron ampliar sus conocimientos sobre el tema. Además lograron también otros conocimientos que nos parecen fundamentales para los profesores, a saber: *a)* que los conceptos matemáticos (en este caso la proporcionalidad) son complejos y que es necesario trabajarlos a lo largo de mucho tiempo para lograr su aprendizaje en los estudiantes; *b)* que un mayor conocimiento del tema permite enseñarlo mejor: *Si lo entendemos, ponemos actividades sencillas y ágiles que faciliten la comprensión (del niño). Lo comprendo mejor y esto me permite trabajarlo de otro modo, [pero] necesito continuar con el aprendizaje.*

No obstante los avances obtenidos, aún al final del taller se resolvían con más facilidad los problemas cuya solución era posible utilizando relaciones escalares, lo que muestra que la proporcionalidad y las relaciones que implica, no son de fácil comprensión y manejo ni para los docentes.

Al inicio de este trabajo nos planteamos como hipótesis la idea de que un proceso de formación en el que asistieran todos los profesores de una escuela sería más provechoso, que aquel donde los docentes participaran de manera individual. Esta hipótesis tiene una validez que debe seguirse constatando; sin embargo, hay indicadores que van en tal sentido: por ejemplo, la conclusión obtenida por los docentes respecto a la relevancia de trabajar en conjunto la planeación del tema a lo largo de la primaria; o la participación de quien dirige el plantel escolar, no sólo con el fin de facilitar y motivar a los participantes para que lo aprendido se traduzca en acciones, sino incluso para evitar estancamientos y con ello hacer avanzar el proceso de formación en momentos críticos. En este caso, nos parecen relevantes las participaciones de la directora en varios sentidos: el llamado a la aceptación del "no saber", o a reconocer las limitaciones de la formación recibida como docentes; el énfasis en la importancia del tema abordado y en la importancia de la acción colectiva basada en el acuerdo y la planeación, entre otros.

Por supuesto, el papel del director dependerá de las características y virtudes de éste, no todos los directores tendrán la autoridad ni la capacidad de conminar a sus colegas a hacer un buen trabajo académico, por lo que no es posible hacer afirmaciones generales sobre la función que un director represente en un proceso de formación.

Un beneficio más general que parece reflejar el valor del trabajo al interior de la comunidad docente constituida en una escuela, es que el conocimiento sobre el tema se ha socializado, que la directora ha reconocido la relevancia de que los profesores estén bien preparados en lo disciplinar, que se han identificado las repercusiones del trabajo propio sobre el trabajo de los otros y la importancia de funcionar como colectivo.

Sería deseable que, como resultado del nuevo aprendizaje adquirido en la comunidad, se promovieran y realizaran acciones que prolonguen estos aprendizajes e impacten en los aprendizajes de los alumnos. Saber si esto ocurrió o no, es cuestión de una nueva investigación, aunque tenemos indicios de que es más fácil modificar el discurso que la acción, sea ésta individual o colectiva (ver Gutiérrez, en proceso).

REFERENCIAS

Alatorre, S. (2004). *¿A, B o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*. Tesis doctoral. México: Cinvestav.

Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.

Block, D., Dávila, M., Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. En *Revista Educación Matemática*, *7*(3). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Block, D. (2006, junio). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19,* 675-680. Clame.

Block. D., Mendoza, T., Ramírez, M. (2011). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: Ediciones SM.

Díaz, M. (2006). *La formación del docente; una tarea inconclusa*. Tesis de maestría. UPN, Unidad 142, México.

Estrella, L. R. (2003). *El impacto de los cursos de capacitación del PAREB en el desempeño de los docentes de Educación Primaria*. Tesis de maestría. UPN, Unidad 31, México.

Fernández, C. Llinares, S. y Valls (2011, ene/jun). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae*, *13*(1), 9-29.

Giménez, J., Llinares, S., Sánchez, V. (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada, España: Comares.

Gutiérrez, C. (2008). *Proceso de reflexión en un taller de matemáticas para docentes en servicio*. Tesis de maestría. UPN, México.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D. & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of teacher education*, *58*(1), 47-61.

Hill, H.C., D. Ball y S.G. Schilling (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Llinares, S. (2005). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En Ma. del Carmen Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid, España: Pearson-Prentice, 187-220.

Parada, S., Figueras, O. y Pluvinage, F. (2009). Hacia un modelo de reflexión de la práctica profesional del profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* Santander: SEIEM, 355-366.

Rey, C. (2011). *Construcción de conocimiento acerca de la intervención curricular*. Tesis de doctorado. Universidad de Alicante, España.

Rivas, M., Godino, J. y Castro, W. (2012, abril). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletim de Educaçao Matemática*, *26*(42B), 559-588.

SEP (2010). *Libro de Matemáticas del alumno.* Primero a sexto grados. México: SEP.

SEP (2011). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria*. México: SEP.

SEP (2011a). *Competencias para el México que queremos. Hacia PISA 2012*. México: SEP.

SEP-SEBYN-CGAYCMS (2006). Reglas de operación del Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio. México: SEP.

Trigueros, M. & Lozano, M. (2012). Teachers teaching mathematics with Enciclomedia: a study of documentational genesis (cap. 13). En G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (Eds.), *Mathematics teacher education,* vol. 7. Nueva York: Springer Science.

Valls, J., Llinares, S. y Callejo, M. L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (pp. 27-47). En M. C. Penalva, I. Escudero, D. Barba. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas*. España: Grupo Proyecto Sur.

Vergnaud, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Bases de datos Excale. Excale 06, Ciclo 2008-2009. Disponible en www.inee.gob. mx. Consultado el 30 de mayo de 2014.

http://formacioncontinua.sep.gob.mx/

http://www.sep.gob.mx

http://basica.sep.gob.mx

http://www.enlace.sep.gob.mx/que_es_enlace/

Secretaría de Educación Pública
Emilio Chuayffet Chemor *Secretario de Educación Pública*
Efrén Tiburcio Rojas Dávila *Subsecretario de Educación Superior*

Universidad Pedagógica Nacional
Tenoch Esaú Cedillo Ávalos *Rector*
Ernesto Diaz Couder Cabral *Secretario Académico*
Federico Valle Rodríguez *Secretario Administrativo*
Alejandra Javier Jacuinde *Directora de Planeación*
Juan Acuña Guzmán *Director de Servicios Jurídicos*
Fernando Velázquez Merlo *Director de Biblioteca y Apoyo Académico*
Xóchitl Leticia Moreno Fernández *Directora de Unidades* UPN
América María Teresa Brindis Pérez *Directora de Difusión Cultural y Extensión Universitaria*

Coordinadores de Área Académica
Lucila Parga Romero *Política Educativa, Procesos Institucionales y Gestión*
Jorge Tirzo Gómez *Diversidad e Interculturalidad*
Teresa Martínez Moctezuma *Aprendizaje y Enseñanza en Ciencias, Humanidades y Artes*
Enrique Agustín Reyes Gaytán *Tecnologías de Información y Modelos Alternativos*
Mónica Angélica Calvo López *Teoría Pedagógica y Formación Docente*

Comité Editorial UPN
Tenoch Esaú Cedillo Ávalos *Presidente*
Ernesto Díaz Couder Cabral *Secretario Ejecutivo*
América María Teresa Brindis Pérez *Coordinadora Técnica*

Vocales académicos internos
María del Carmen Jiménez Ortiz
Jorge Tirzo Gómez
Rubén Castillo Rodríguez
Rodrigo Cambray Núñez
Oscar de Jesús López Camacho
Juan Bello Domínguez

Vocales académicos externos
Judith Orozco Abad
Raúl Ávila
Rodrigo Muñoz Talavera

Griselda Mayela Crisóstomo Alcántara: **Subdirectora de Fomento Editorial**
Diseño de portada y formación de interiores: Margarita Morales Sánchez
Diseño de maqueta de portada: Jesica Coronado Zarco
Edición y corrección de estilo: Alma A. Velázquez L.T.

Esta primera edición de *Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas. What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning*, estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial, de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria, de la Universidad Pedagógica Nacional y se publicó el 23 de enero de 2015.